Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2022

Takmičenje iz MATEMATIKE

za III razred srednje škole

1. a) Koristeći matematičku indukciju dokazati da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

b) Dokazati je broj $7^{2022} - 3^{2022}$ djeljiv sa 40.

Rješenje: a) Za $n = 1$ tvrđenje je očigledno tačno. Pretpostavimo da tvrđenje važi za n i dokažimo da važi i za $n+1$. Imamo

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a^{n+1} - ab^n + ab^n - b^{n+1} = a(a^n - b^n) + b^n(a-b) =$$
$$a(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}) + (a-b)b^n = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n)$$

čime je dokaz gotov.

b) Važi

$$\begin{aligned} 7^{2022} - 3^{2022} &= (7^{1011} - 3^{1011})(7^{1011} + 3^{1011}) \\ &= (7-3)\sum_{k=0}^{1011} a^k b^{1011-k}\,(7+3)\sum_{k=0}^{1011}(-1)^k a^k b^{1011-k} \\ &= 40\sum_{k=0}^{1011}(-1)^k a^k b^{1011-k}\sum_{k=0}^{1011} a^k b^{1011-k}. \quad \square \end{aligned}$$

2. Odrediti posljednje dvije cifre broja $N = 1! + 2! + 3! + \ldots + 2021! + 2022!$.

Rješenje: Primijetimo da je broj $10! = (2 \cdot 5 \cdot 10) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)$ djeljiv sa 100. Isto važi i za brojeve $k!$, za $k \geq 11$. Zaključujemo da su posljednje dvije cifre broja N iste kao posljednje dvije cifre broja

$$M = 1! + 2! + 3! + \ldots + 9!$$

Posljednje dvije cifre broja M su posljednje dvije cifre broja $1+2+6+24+20+20+40+20+80$. Dakle, cifra desetica je 1, a cifra jedinica je 3. $\square$

3. Neka je $S = \{1, 2, \ldots, 2021, 2022\}$. Odrediti broj podskupova skupa S oblika $\{k, k \cdot 2^n\}$, gdje je $n \in \mathbf{N}$.

Rješenje: Iz uslova da je $k \cdot 2^n \in S$, slijedi da je $2^n \leq 2022$, odnosno $1 \leq n \leq 10$.
Za $n = 1$, tražimo podskupove oblika $\{k, 2k\}$ i takvih parova ima 1011, odnosno $\lfloor \frac{2022}{2} \rfloor$.
Za $n = 2$, tražimo podskupove oblika $\{k, 4k\}$, što se svodi na traženje brojeva oblika $4k, k \in \mathbf{N}$, iz skupa S. Takvih brojeva, pa i traženih parova za $n = 2$, ima $\lfloor \frac{2022}{4} \rfloor = 505$.
$\vdots$
Za $n = 10$ tražimo podskupove oblika $\{k, 1024k\}$, a takvih podskupova ima $\lfloor \frac{2022}{1024} \rfloor = 1$.
Dakle, ukupan broj traženih podskupova je

$$\left\lfloor \frac{2022}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{2022}{1024} \right\rfloor = 2014. \qquad \square$$

4. U trouglu ABC važi $|AB| = 5$, $|BC| = 8$ i $|CA| = 7$. Bisektrisa unutrašnjeg ugla $\angle BAC$ siječe stranicu BC u tački P i neka je Q tačka stranice AB različita od A tako da je $|CQ| = 7$. Odrediti površinu četvorougla $ACPQ$.

Rješenje: Koristeći kosinusnu teoremu imamo da je

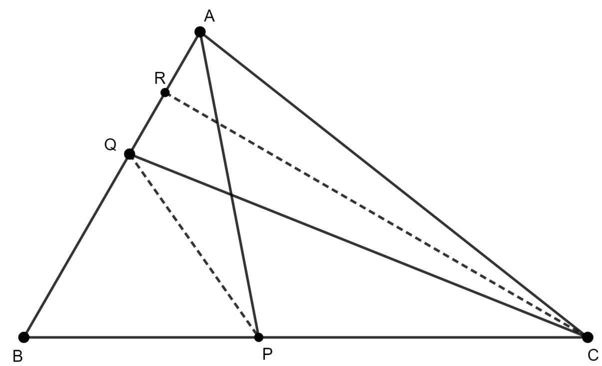
$$\cos \angle ABC = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2},$$

pa je $\angle ABC = 60°$. Zaključujemo da je

$$\mathrm{P}(\Delta ABC) = \frac{5 \cdot 8 \cdot \sin \angle ABC}{2} = 10\sqrt{3}.$$

Na osnovu teoreme o bisektrisi ugla imamo

$$\frac{BP}{BC} = \frac{AB}{AB + AC} = \frac{5}{12},$$



što povlači da je $BP = \frac{10}{3}$.

Neka je R podnožje visine iz tačke C na stranicu AB. Iz SUS stava o podudarnosti trouglova imamo da je $\Delta CAR \cong \Delta CQR$. Iz pravouglog trougla RCB, kako je $\angle RBC = 60°$, imamo da je $BR = 4$, pa je $AR = QR = 1$ i $BQ = 3$.

Kako je

$$\mathrm{P}(BPQ) = \frac{\frac{10}{3} \cdot 3 \cdot \sin \angle ABC}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

to je

$$\mathrm{P}(ACPQ) = 10\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}. \;\square$$