

Prirodno-matematički fakultet  
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

**OLIMPIJADA ZNANJA 2022**

Takmičenje iz MATEMATIKE  
za III razred srednje škole

1. a) Koristeći matematičku indukciju dokazati da za svako  $n \in \mathbf{N}$  važi

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

- b) Dokazati je broj  $7^{2022} - 3^{2022}$  djeljiv sa 40.

2. Odrediti posljednje dvije cifre broja  $N = 1! + 2! + 3! + \dots + 2021! + 2022!$ .

3. Neka je  $S = \{1, 2, \dots, 2021, 2022\}$ . Odrediti broj podskupova skupa  $S$  oblika  $\{k, k \cdot 2^n\}$ , gdje je  $n \in \mathbf{N}$ .

4. U trouglu  $ABC$  važi  $|AB| = 5$ ,  $|BC| = 8$  i  $|CA| = 7$ . Bisektrisa unutrašnjeg ugla  $\angle BAC$  siječe stranicu  $BC$  u tački  $P$  i neka je  $Q$  tačka stranice  $AB$  različita od  $A$  tako da je  $|CQ| = 7$ . Odrediti površinu četvorougla  $ACPQ$ .

**Vrijeme rada: 180 minuta.**

**Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**