Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2022

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za I razred srednje škole

1. Neka su a i b realni brojevi različiti od nule, tako da je $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 5$ i $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = 12$. Odrediti vrijednost izraza $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Rješenje: Množeći obje jednakosti sa $ab \neq 0$, imamo da je

$$a^2 + b^2 = 5ab, \quad a^3 + b^3 = 12ab.$$

Kako je $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ iz prethodne dvije jednakosti imamo da je

$$12ab = (a+b)(5ab - ab),$$

odnosno $a + b = 3$, jer je $ab \neq 0$.
Iz identiteta $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, slijedi da je $ab = \frac{(a+b)^2}{7} = \frac{9}{7}$.
Konačno

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{3}{\frac{9}{7}} = \frac{7}{3}. \qquad \square$$

2. Dokazati da je broj

$$3^{2022} - 1$$

djeljiv sa $8\,(3^{4\cdot 337} + 3^{2\cdot 337} + 1)$.

Rješenje: Važi

$$\begin{aligned} 3^{2022} - 1 = ((3^{1011})^2 - 1) &= (3^{1011} - 1)(3^{1011} + 1) = ((3^{337})^3 - 1)((3^{337})^3 + 1) = \\ &= (3^{337} - 1)(3^{2\cdot 337} + 3^{337} + 1)(3^{337} + 1)(3^{2\cdot 337} - 3^{337} + 1) \\ &= (3^{337} - 1)(3^{337} + 1)((3^{2\cdot 337} + 1) - 3^{337})((3^{2\cdot 337} + 1) + 3^{337}) = \\ &= (3^{337} - 1)(3^{337} + 1)((3^{2\cdot 337} + 1)^2 - 3^{2\cdot 337}) \\ &= (3^{337} - 1)(3^{337} + 1)(3^{4\cdot 337} + 3^{2\cdot 337} + 1). \end{aligned}$$

Brojevi $(3^{337}-1)$ i $(3^{337}+1)$ su dva uzastopna parna broja što znači da je jedan djeljiv sa 4 tj. njihov proizvod je djeljiv sa 8. Dakle, $3^{2022}-1$ je djeljiv sa $8(3^{4\cdot 337}+3^{2\cdot 337}+1)$. $\square$

3. Odrediti broj načina da se brojevima $1,2,3,4,5,6,7$ popuni sedam praznih polja tako da su sve nejednakosti tačne:

$$\square < \square < \square > \square < \square > \square > \square$$

Na primjer: $3<4<7>5<6>2>1$.

Rješenje: Primijetimo da 7, kao najveći broj, mora biti na trećoj ili petoj poziciji, u suprotnom je broj 7 manji od nekog broja iz skupa $\{1,2,\ldots,6\}$. Neka je broj 7 na trećoj poziciji. U tom slučaju prve dvije pozicije popunimo sa dva broja iz skupa $\{1,2,\ldots,6\}$, tako da je manji od njih na prvoj poziciji. To možemo uraditi na 15 načina: $1<2$, $1<3$, $1<4$, $1<5$, $1<6$, $2<3$, $2<4$, $2<5$, $2<6$, $3<4$, $3<5$, $3<6$, $4<5$, $4<6$, $5<6$. Preostala četiri polja možemo popuniti tako što najveći od preostala četiri broja smjestimo na petu poziciji. Četvrto polje popunimo sa jednim od preostala 3 broja i to možemo da uradimo na 3 načina. Tada, ostaje da se posljednja dva polja popune na jedinstven način sa preostala dva broja i to u opadajućem redosljedu. Dakle, u slučaju da je broj 7 na trećoj poziciji imamo ukupno $15\cdot 3=45$ načina. Analognim rezonovanjem, isti rezultat se dobija i u slučaju kada je broj 7 na petoj poziciji. Dakle, ukupan broj načina da se popune prazna polja, pod navedenim uslovima, je 90. $\square$

4. U trouglu ABC sa težistem T važi $|AT|=|BC|$ i $\angle CBT=60^\circ$. Odrediti $|CT|:|AT|$.

Rješenje: Označimo sredinu stranice BC sa P i neka je a dužina duži BC.

Iz uslova zadatka imamo $|AT|=|BC|=a$. Kako je T težište trougla, iz $|AT|:|PT|=2:1$ slijedi $|PT|=a/2$.

Kako je P sredina stranice BC, vrijedi $|CP|=|BP|=a/2$. Kako je i $|PT|=a/2$, zaključujemo da je sredina stranice BC centar opisane kružnice trougla TBC, pa je zato taj trougao pravougli.

Nadalje, kako je $\angle CBT=60^\circ$, a ugao $\angle BTC$ prav, vidimo je je $\angle TCB=30^\circ$. Slijedi da je CT visina jednakostraničnog trougla sa stranicom dužine a, pa je

$$|CT|=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Odavde je jasno

$$|CT| : |AT| = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \square$$