Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2022

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za II razred srednje škole

1. Ispitati da li postoje realni brojevi a, b, c tako da je

$$2a(c-a) - b(2a+b) + c(2b-c) = 2022.$$

Rješenje: Lijeva strane jednačine se može transformisati na sljedeći način:

$$L = 2a(c-a) - b(2a+b) + c(2b-c) = 2ac - 2a^2 - 2ab - b^2 + 2bc - c^2$$
$$= -a^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc) = -a^2 - (a+b-c)^2.$$

Očigledno je

$$L \leq 0,$$

pa takvi brojevi ne postoje. $\square$.

2. Dokazati da za svako $x \in \mathbf{R}$ važi

$$\sum_{n=2}^{2022} \frac{1}{x^2 + 2x + n^2} < \frac{3}{4}$$

Rješenje: Važi sljedeći niz nejednakosti

$$\sum_{n=2}^{2022} \frac{1}{x^2+2x+n^2} = \sum_{n=2}^{2022} \frac{1}{(x+1)^2 - 1 + n^2} \leq \sum_{n=2}^{2022} \frac{1}{-1+n^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{2022}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}\right) < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},$$

čime je dokaz gotov. $\square$

3. Odrediti broj načina da se brojevima $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ popuni sedam praznih polja tako da su sve nejednakosti tačne:

$$\square < \square < \square > \square < \square > \square > \square$$

Na primjer: $3 < 4 < 7 > 5 < 6 > 2 > 1$.

Rješenje: Primijetimo da 7, kao najveći broj, mora biti na trećoj ili petoj poziciji, u suprotnom je broj 7 manji od nekog broja iz skupa $\{1, 2, \dots, 6\}$. Neka je broj 7 na trećoj poziciji. U tom slučaju prve dvije pozicije popunimo sa dva broja iz skupa $\{1, 2, \dots, 6\}$, tako da je manji od njih na prvoj poziciji. To možemo uraditi na 15 načina: $1 < 2$, $1 < 3$, $1 < 4$, $1 < 5$, $1 < 6$, $2 < 3$, $2 < 4$, $2 < 5$, $2 < 6$, $3 < 4$, $3 < 5$, $3 < 6$, $4 < 5$, $4 < 6$, $5 < 6$. Preostala četiri polja možemo popuniti tako što najveći od preostala četiri broja smjestimo na petu poziciji. Četvrto polje popunimo sa jednim od preostala 3 broja i to možemo da uradimo na 3 načina. Tada, ostaje da se posljednja dva polja popune na jedinstven način sa preostala dva broja i to u opadajučem redosljedu. Dakle, u slučaju da je broj 7 na trećoj poziciji imamo ukupno $15 \cdot 3 = 45$ načina. Analognim rezonovanjem, isti rezultat se dobija i u slučaju kada je broj 7 na petoj poziciji. Dakle, ukupan broj načina da se popune prazna polja, pod navedenim uslovima, je 90. $\square$

4. U trouglu ABC sa težistem T važi $|AT| = |BC|$ i $\angle CBT = 60°$. Odrediti $|CT| : |AT|$.

Rješenje: Označimo sredinu stranice BC sa P i neka je a dužina duži BC.

Iz uslova zadatka imamo $|AT| = |BC| = a$. Kako je T težište trougla, iz $|AT| : |PT| = 2 : 1$ slijedi $|PT| = a/2$.

Kako je P sredina stranice BC, vrijedi $|CP| = |BP| = a/2$. Kako je i $|PT| = a/2$, zaključujemo da je sredina stranice BC centar opisane kružnice trougla TBC, pa je zato taj trougao pravougli.

Nadalje, kako je $\angle CBT = 60°$, a ugao $\angle BTC$ prav, vidimo je je $\angle TCB = 30°$. Slijedi da je CT visina jednakostraničnog trougla sa stranicom dužine a, pa je

$$|CT| = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Odavde je jasno

$$|CT| : |AT| = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \square$$