Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2022

Takmičenje iz MATEMATIKE

za IV razred srednje škole

1. Pet međusobno različitih realnih brojeva a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 uzastopni su članovi aritmetičkog niza, a njihov zbir iznosi 50. Odrediti te brojeve ako su brojevi a_1, a_2 i a_5 uzastopni članovi geometrijskog niza.

   Rješenje: Kako su $a_1, \ldots, a_5$ članovi aritmetičkog niza čiji je zbir 50 onda

   $$5a_1 + 10d = 50 \implies a_1 + 2d = 10,$$

   gdje je d razlika aritmetičkog niza. Kako a_1, a_2 i a_5 čine geometrijski niz to važi

   $$a_1 \cdot a_5 = a_2^2 \implies a_1 \cdot (a_1 + 4d) = (a_1 + d)^2.$$

   Kako je $a_1 + 2d = 10$ to slijedi

   $$(10 - 2d)(10 + 2d) = (10 - d)^2$$

   odakle dobijamo $d = 0$ ili $d = 4$. Kako su brojevi a_j međusobno različiti, to je $d = 4$. Uvrštavanjem u $a_1 + 2d = 10$ dobijamo $a_1 = 2$. $\square$

2. a) Dokazati da prirodan broj n daje ostatak $r \in \{0, 1, 2\}$ pri dijeljenju sa 3 ako i samo ako zbir cifara broja n daje ostatak r pri dijeljenju sa 3.
   b) Odrediti ostatak pri dijeljenju sa 3 broja $N = 1234567891011 \ldots 20212022$.

   Rješenje: a) Neka je $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$. Tada je

   $$n = a_1 10^{k-1} + a_2 10^{k-2} + \ldots + a_{k-1} 10 + a_k,$$

odnosno

$$n = a_1(9+1)^{k-1} + a_2(9+1)^{k-2} + a_{k-1}(9+1) + a_k.$$

Koristeći Njutnovu binomnu formulu za svaki član oblika $(9+1)^l$, imamo da je

$$n = 3 \cdot A + (a_1 + a_2 + \ldots + a_k),$$

gdje je $A \in \mathbf{N}$. Odavde slijedi da $3|[n-(a_1+\ldots+a_k)]$, odnosno da n i $a_1+\ldots+a_k$ daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3, što je trebalo dokazati.

b) Primijetimo da za $k \in N$ zbir cifara broja $\overline{k(k+1)(k+2)}$ je djeljiv sa 3. Neka broj k, bez gubljenja opštosti, daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 3. Kako su u pitanju 3 uzastopna prirodna broja, to oni daju ostatak, respektivno, 1, 2 i 0 pri dijeljenju sa 3, a na osnovu dijela a), to znači da zbirovi cifara broja k, $k+1$ i $k+2$ daju ostatak, respektivno, 1, 2 i 0 pri dijeljenju sa 3. Zaključujemo da suma zbirova cifara broja k, broja $k+1$ i broja $k+2$ daje ostatak 0 pri dijeljenju sa 3.

Kako je $2022 = 3 \cdot 674$, to je zbir cifara broja N jednak sumi zbirova cifara broja 123, 456, 789, 101112, $\ldots$ 202020212022. Kako je svaki od tih zbirova, na osnovu dokazanog, djeljiv sa 3 to je zbir cifara broja N djeljiv sa 3. Dakle, broj N daje ostatak 0 pri dijeljenju sa 3. $\square$

3. Neka je $S = \{1, 2, \ldots, 2021, 2022\}$. Odrediti broj podskupova skupa S oblika $\{k, k \cdot 2^n\}$, gdje je $n \in \mathbf{N}$.

Rješenje: Iz uslova da je $k \cdot 2^n \in S$, slijedi da je $2^n \leq 2022$, odnosno $1 \leq n \leq 10$.
Za $n = 1$, tražimo podskupove oblika $\{k, 2k\}$ i takvih parova ima 1011, odnosno $\lfloor \frac{2022}{2} \rfloor$.
Za $n = 2$, tražimo podskupove oblika $\{k, 4k\}$, što se svodi na traženje brojeva oblika $4k, k \in \mathbf{N}$, iz skupa S. Takvih brojeva, pa i traženih parova za $n = 2$, ima $\lfloor \frac{2022}{4} \rfloor = 505$.

$\vdots$

Za $n = 10$ tražimo podskupove oblika $\{k, 1024k\}$, a takvih podskupova ima $\lfloor \frac{2022}{1024} \rfloor = 1$.
Dakle, ukupan broj traženih podskupova je

$$\left\lfloor \frac{2022}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{2022}{1024} \right\rfloor = 2014. \qquad \square$$

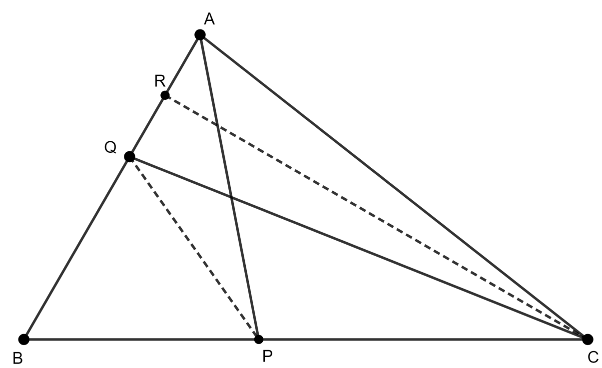
4. U trouglu ABC važi $|AB| = 5$, $|BC| = 8$ i $|CA| = 7$. Bisektrisa unutrašnjeg ugla $\angle BAC$ siječe stranicu BC u tački P i neka je Q tačka stranice AB različita od A tako da je $|CQ| = 7$. Odrediti površinu četvorougla $ACPQ$.

Rješenje: Koristeći kosinusnu teoremu imamo da je

$$\cos\angle ABC = \frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 8} = \frac{1}{2},$$

pa je $\angle ABC = 60^\circ$. Zaključujemo da je

$$\mathrm{P}(\Delta ABC) = \frac{5\cdot 8\cdot \sin\angle ABC}{2} = 10\sqrt{3}.$$



Na osnovu teoreme o bisektrisi ugla imamo

$$\frac{BP}{BC} = \frac{AB}{AB+AC} = \frac{5}{12},$$

što povlači da je $BP = \frac{10}{3}$.
Neka je R podnožje visine iz tačke C na stranicu AB. Iz SUS stava o podudarnosti trouglova imamo da je $\Delta CAR \cong \Delta CQR$. Iz pravouglog trougla RCB, kako je $\angle RBC = 60^\circ$, imamo da je $BR = 4$, pa je $AR = QR = 1$ i $BQ = 3$.
Kako je

$$\mathrm{P}(BPQ) = \frac{\frac{10}{3}\cdot 3\cdot \sin\angle ABC}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

to je

$$\mathrm{P}(ACPQ) = 10\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}. \ \square$$