

Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2022

Takmičenje iz MATEMATIKE
za IV razred srednje škole

1. Pet međusobno različitih realnih brojeva a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 uzastopni su članovi aritmetičkog niza, a njihov zbir iznosi 50. Odrediti te brojeve ako su brojevi a_1, a_2 i a_5 uzastopni članovi geometrijskog niza.
2. a) Dokazati da prirodan broj n daje ostatak $r \in \{0, 1, 2\}$ pri dijeljenju sa 3 ako i samo ako zbir cifara broja n daje ostatak r pri dijeljenju sa 3.
b) Odrediti ostatak pri dijeljenju sa 3 broja $N = 1234567891011 \dots 20212022$.
3. Neka je $S = \{1, 2, \dots, 2021, 2022\}$. Odrediti broj podskupova skupa S oblika $\{k, k \cdot 2^n\}$, gdje je $n \in \mathbb{N}$.
4. U trouglu ABC važi $|AB| = 5$, $|BC| = 8$ i $|CA| = 7$. Bisektrisa unutrašnjeg ugla $\angle BAC$ siječe stranicu BC u tački P i neka je Q tačka stranice AB različita od A tako da je $|CQ| = 7$. Odrediti površinu četvorougla $ACPQ$.

Vrijeme rada: 180 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.